G.S Louis Le Grand
Rabat Hassan

G.S Louis Le Grand
Rabat Agdal

G.S Louis Le Grand
Fès

الامتحـــان الموحـــــد لنــــهايـــــة الــــــدورة الأولــــى

Examen normalisé de la fin du 1er semestre

Matière	MATHS	الرياضيات	المادة
Coefficient	9		المعامل
Année scolaire	2014 - 2015		السنة الدراسية
Niveau scolaire	2BAC MATHS	السنة الثانيةعلوم رياضية	المستوى
Durée	2 HEURES	ساعتــــــان	المدة الزمنية

التمرين الأول

ليكن z عدد عقدي مخالف ل -1. نضع : $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$

1) أ) حدد العدد الحقيقي y الذي يحقق : $f(iy)=iy$ — 0.5

ب) حل المعادلة $f(z)=z$. ليكن z_0, z_1, z_2 حلول المعادلة (E) بحيث $\operatorname{Re}(z_0)=0$. و $\operatorname{Re}(z_1)>\operatorname{Re}(z_2)$ — 0.5 — 0.5

2) أ) اكتب z_1+1 و z_2+1 على الشكل المثلثي. — 0.5

ب) استنتج الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 .

3) نفترض أن: $z=e^{i\alpha}$ بحيث $\alpha\in]0,\pi[$. — 0.5

أ) اثبت أن : $\overline{f(z)}=izf(z)$. — 0.5

ب) حدد α اذا علمت أن $\overline{f(z)}+f(z)=0$. — 0.5

ت) اكتب $f(z)$ على الشكل الأسي. — 0.5

4) حدد z اذا علمت أن $\begin{cases}|z|=1\\ \operatorname{Re}(f(z))=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

التمرين الثاني

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^x-x$

الجزء الأول

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ — 0.5 — 0.5

ب)أدرس تغيرات الدالة g وضع جدول تغيراتها. — 0.5

2) بين أن لكل $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ المعادلة $g(x)=n$ تقبل حلين α_n و β_n بحيث $\alpha_n<0<\beta_n$ — 0.5

3) أ) بين أن المتتالية (α_n) تناقصية. — 0.5

ب) بين أن المتتالية (α_n) غير مصغورة. — 0.25

ت) استنتج $\lim\alpha_n$ — 0.5

4) أ) بين أن $(\forall x>0): 2x-\ln(2x)>x$ — 0.5

ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*): \ln(n)\le\beta_n\le\ln(2n)$ — 0.5

ت) استنتج $\lim\beta_n$ ثم $\lim\dfrac{\beta_n}{\ln(n)}$

6) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يسار 0 وأن $f_g'(0)=\frac{1}{2}$ و أول هندسيا النتيجة.	0.5 0.5
7) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $h(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$	0.25
أ) بين أن $(\forall x\in]0,1[):h(x)>0$.	0.5
ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ و أحسب $f'(x)$.	
ت) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على $]0,1[$.	0.25
8) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ و أحسب $f'(x)$.	
نقبل أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل حلا وحيدا γ في $]-\infty,0[$ وأن $(\forall x\in]-\infty,0[):f'(x)<0\Leftrightarrow x<\gamma$	0.5
9) أ) ضع جدول تغيرات الدالة f .	0.25
ب) أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ $\gamma\approx-0,5$ و $f(\gamma)\approx-1,2$)	
10) بين أن f تقابل من $[0,1]$ نحو $[-1,0]$	
<u>الجزء الثاني</u>	
ليكن p عدد حقيقي بحيث $p\in]\frac{1}{2},1[$.	0.5
ونعتبر الدالة f_p المعرفة على $[0,1[$ بما يلي : $f_p(x)=p\ln(1+x)+(1-p)\ln(1-x)$	0.5
1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to1^-}f_p(x)$	0.5
ب) ضع جدول تغيرات الدالة f_p .	
2) بين أن المعادلة $f_p(x)=0$ تقبل حلين 0 و α_p في المجال $[0,1[$ وأن $2p-1<\alpha_p<1$.	0.5
3) بين أن $(\forall p\in]\frac{1}{2},1[):\alpha_p=f^{-1}(1-\frac{1}{p})$	
4) نعتبر الدالة ψ المعرفة على $[\frac{1}{2},1[$ بما يلي $\begin{cases}\psi(p)=\alpha_p=f^{-1}(1-\frac{1}{p});p\in]\frac{1}{2},1[\\ \psi(\frac{1}{2})=0\end{cases}$	0.25 0.5
أ) بين أن الدالة ψ متصلة على يمين $\frac{1}{2}$.	0.5
ب) بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على يمين -1 وأن $(f^{-1})'_d(-1)=1$.	
ت) استنتج أن الدالة ψ قابلة للاشتقاق على يمين $\frac{1}{2}$ وأن $\psi'_d(\frac{1}{2})=4$	

الجزء الثاني

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\varphi(x) = e^{x} - 2$ 0.25

1) أدرس تغيرات الدالة φ وضع جدول تغيراتها. 0.25

2) بين أن $\varphi([-2,-1]) \subset [-2,-1]$ 0.25

3) بين أن $\varphi(\alpha_2) = \alpha_2$ وأن $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$

ص2

0.5

4) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\left(u_{n+1} = \varphi(u_n)\right) \end{cases}$ 0.5

أ) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \alpha_2 \leq u_n \leq -1$ 0.5

ب) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha_2| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha_2|$

ت) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و احسب نهايتها.

التمرين الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty,1]$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} & ; x \in]0,1[\\ f(x) = \dfrac{\arctan(e^{-x}-1)}{x} & ; x \in]-\infty,0[\\ f(0) = -1 , et\ f(1) = 0 \end{cases}$.

0.5

0.25

الجزء الأول

1) أ) أدرس اتصال الدالة f في 0 و على يسار 1. 0.5

ب) أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة المحصلة . 0.5

2) بين $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة المحصل عليها. 0.25

3) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 و أن $f'_d(0) = 1$ ثم أول هندسيا النتيجة. 0.5

4) أ) بين أن $(\forall x < 0) : e^{-x} + x - 1 > 0$

ب) بين أن $(\forall x < 0) : 0 < e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2} < -x(e^{-x} - 1 + x)$ 0.25

0.5

ت) استنتج $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2}$ 0.25

5) أ) بين باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : |\arctan(x) - x| \leq |x|^3$ 0.5

ب) استنتج $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2}$